



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SUPERLINEARITAMI V
MATEMATICKÉM MODELOVÁNÍ PROCESŮ V
MECHANICE**

DIFFERENTIAL EQUATION WITH SUPER-LINEARITIES IN MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESSES
IN MECHANICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Lenka Maňáková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Lenka Maňáková**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Diferenciální rovnice se superlinearitami v matematickém modelování procesů v mechanice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při matematickém modelování v mechanice se objevují obyčejné diferenciální rovnice různých typů. I když se většinou jedná o dosti složité nelineární rovnice, vhodnou aproximací nelinearit dostaneme jednodušší rovnice, které jsou dobře známé, nebo lze jejich vlastnosti uspokojivě analyticky vyšetřit. Představiteli takových "aproximativních" rovnic jsou diferenciální rovnice se superlinearitami.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se základy teorie dynamických systémů (zejména autonomních systémů).
2. Interpretace diferenciálních rovnic se superlinearitami v souvislosti s aproximací volných kmitů vhodných nelineárních oscilátorů.
3. Vyšetření otázek existence singulárních bodů (rovnovážných stavů) a jejich stability, analytický popis fázových portrétů a jejich interpretace.

Seznam doporučené literatury:

RACHŮNKOVÁ, I. a J. FIŠER. Dynamické systémy 1, Olomouc: Univerzita Palackého, 2014. ISBN 978-80-244-4338-6.

KALAS, J. a M. RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.

KOVACIC (ed.), I. a M. J. BRENNAN (ed.). The Duffing equation. Nonlinear oscillators and their behaviour. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-470-71549-9.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na kvalitativní studium a interpretaci diferenciální rovnice se superlinearitami. Především řeší otázku existence rovnovážných bodů a vykreslení fázových portrétů pomocí teorie dynamických systémů, přesněji pomocí Hamiltonových systémů. Prostřednictvím fázových portrétů jsou popsány vlastnosti a typy některých řešení.

Summary

This work is focused on the qualitative study and interpretation of a certain differential equation with superlinearities. In particular, a question of the existence of equilibrium points and the drawing of phase portraits is investigated using the theory of dynamic systems, more precisely using Hamilton systems. The properties and types of solutions are illustrated in phase portraits.

Klíčová slova

Diferenciální rovnice, rovnovážný bod, stabilita, hamiltonián, orbita, fázový portrét.

Keywords

Differential equation, equilibrium point, stability, hamiltonian, orbit, phase portrait.

MAŇÁKOVÁ, L. *Diferenciální rovnice se superlinearitami v matematickém modelování procesů v mechanice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 31 s. Vedoucí doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Diferenciální rovnice se superlinearitami v matematickém modelování procesů v mechanice* vypracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Jiřího Šremra, Ph.D. a užitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Lenka Maňáková

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu doc. Ing. Jiřímu Šremrovi, Ph.D. za konzultace a vedení při psaní této práce, a dále pak Mgr. Janě Rychlíkové za vytvoření kladného vztahu k matematice při studiu na střední škole.

Lenka Maňáková

Obsah

Úvod	12
1 Teoretický základ	13
1.1 Dynamický systém a jeho vlastnosti	13
1.2 Stabilita rovnovážných bodů v \mathbb{R}^2	15
1.3 Hamiltonovy systémy	17
2 Analýza vybrané diferenciální rovnice se superlinearitami	18
2.1 Rovnovážné body	20
2.2 Hamiltonián soustavy (2.6)	22
2.3 Řešení pro jednotlivé závislosti vstupních hodnot	23
2.3.1 Příklad $l_0 < 6s$	23
2.3.2 Příklad $l_0 = 6s$	24
2.3.3 Příklad $6s < l_0 < 8s$	26
2.3.4 Příklad $l_0 = 8s$	27
2.3.5 Příklad $l_0 > 8s$	28
Závěr	30
Literatura	31

Úvod

Diferenciální rovnice jsou jedním z nejpoužívanějších matematických aparátů při modelování procesů nejen v technické sféře. Jedná se o rovnice, ve kterých jako proměnná vystupuje derivace hledané funkce. Pro vyšetřování takových rovnic používáme určité metody. Jedněmi z nich jsou analytické metody, při jejichž použití získáme přímo funkční předpis pro řešení zadané diferenciální rovnice. Tato metoda není moc efektivní, neboť ji lze použít pouze u některých typů rovnic. Pokud rovnici nelze analyticky řešit, naskytá se možnost použít numerické metody, kdy získáváme pouze přibližné hodnoty řešení. Další důležitou metodou je pak kvalitativní studium diferenciální rovnice.

Tato práce je zaměřena právě na poslední zmíněnou metodu. Budeme se zabývat vlastnostmi řešení a to především užitím teorie dynamických systémů, kde velmi důležitou roli hrají Hamiltonovy systémy.

Práce je členěna do dvou hlavních částí. První část je věnovaná teoretickému základu, kde budou uvedeny pojmy jako jsou dynamický systém, rovnovážný bod, orbita či fázový portrét. Budeme se zabývat tím, jak posuzovat stabilitu rovnovážných bodů a uvedeme základní poznatky z teorie Hamiltonových systémů, například vysvětlíme pojmy hamiltonián a jeho hladina. V druhé části se budeme zabývat analýzou diferenciální rovnice se superlinearitami. Bude se jednat o rovnici, která vznikne aproximací nelinearit v pohybové rovnici jednoho nelineárního oscilátoru. Vyšetříme otázku existence rovnovážných bodů a vyjádříme hamiltonián. Pak podle jednotlivých případů závislosti vstupních hodnot vykreslíme fázový portrét a popíšeme jak se chovají některá řešení, přesněji jaké existují typy řešení, které lze určit pomocí fázového portréту.

1 Teoretický základ

Než přejdeme k samotnému modelování případu z mechaniky, je potřeba uvést základní teoretické poznatky. Budeme stavět na základech teorie diferenciálních rovnic a to především na nelineárních systémech. Nelineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic nejsme většinou schopni obecně řešit, a proto se budeme zabývat jejich kvalitativními vlastnostmi, především existencí rovnovážných bodů, jejich stabilitou a klasifikací. K tomu nám bude dopomáhat teorie dynamických systémů. Veškeré definice a věty lze nalézt například v [1], [3], [4] nebo v [5].

1.1 Dynamický systém a jeho vlastnosti

Dynamický systém slouží jako matematický nástroj k popisu různých fyzikálních systémů, které se mění v čase. Pokud sledujeme vývoj dynamického systému nepřetržitě, jedná se o spojitý dynamický systém a pokud ho sledujeme v oddělených časových okamžicích, mluvíme o diskrétním dynamickém systému.

Definice 1. Nechť G je otevřená podmnožina prostoru \mathbb{R}^n a vektorová funkce ψ zobrazuje množinu $\mathbb{R} \times G$ do G . Dále nechť jsou složky vektorové funkce ψ spojité na $\mathbb{R} \times G$ a nechť má ψ následující vlastnosti:

- (i) $\psi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$ pro každé $\mathbf{x}^0 \in G$;
- (ii) $\psi(t + s, \mathbf{x}^0) = \psi(t, \psi(s, \mathbf{x}^0))$ pro každé $t, s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in G$;
- (iii) pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje k zobrazení $\psi(t, \cdot)$ inverzní zobrazení a je rovno $\psi(-t, \cdot)$.

Potom zobrazení $\psi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ nazveme *tok*. Pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$ nazveme zobrazení $\psi(t, \cdot) : G \rightarrow G$ *dynamický systém v \mathbb{R}^n* . Prostor \mathbb{R}^n nazveme *fázový prostor*.

Poznámka 1. Podle definice 1 byl dynamický systém definován v prostoru s dimenzí n . Pokud položíme $n = 1$, sledujeme časový vývoj jedné veličiny a hovoříme pak o *skalárním dynamickém systému*. Pokud $n = 2$, hovoříme o *planárním dynamickém systému*.

Uvažujme nyní soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve vektorovém zápisu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelná vektorová funkce a $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Tato soustava se nazývá *autonomní*, funkce \mathbf{f} totiž nezávisí na nezávislé proměnné t .

Definice 2. Řešením rovnice (1.1) na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme takovou vektorovou funkci $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, jejíž složky mají spojitou derivaci na J a \mathbf{x} splňuje soustavu (1.1) pro každé $t \in J$.

Spolu se soustavou (1.1) uvažujme *Cauchyovu* neboli *počáteční podmínku*

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (1.2)$$

kde $\mathbf{x}^0 \in G$. Označme $\varphi(\cdot, \mathbf{x}^0)$ řešení úlohy (1.1), (1.2) a uveďme základní větu o jeho existenci a jednoznačnosti.

Věta 1. [4, Věta 1.10] *Nechť G je otevřená podmnožina v \mathbb{R}^n obsahující bod \mathbf{x}^0 . Dále nechť mají složky vektorové funkce \mathbf{f} spojité parciální derivace 1. řádu na G . Potom úloha (1.1), (1.2) má jediné řešení definované na maximálním intervalu $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0}) \subseteq \mathbb{R}$ obsahujícím 0.*

Poznámka 2. Pro autonomní soustavy není potřeba uvažovat počáteční podmínku v jiném bodě než v bodě 0. Pro libovolné $t_0 \in \mathbb{R}$ je totiž funkce $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t - t_0, \mathbf{x}^0)$ pro $t \in (a_{\mathbf{x}^0} + t_0, b_{\mathbf{x}^0} + t_0)$ řešením počáteční úlohy $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

Definice 3. Množinu bodů $[t, \varphi_1(\cdot, \mathbf{x}^0), \dots, \varphi_n(\cdot, \mathbf{x}^0)]$, kde $t \in I_{\mathbf{x}^0}$, nazýváme *grafem* řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathbf{x}^0)$ soustavy (1.1).

Definice 4. Množinu bodů $[\varphi_1(\cdot, \mathbf{x}^0), \dots, \varphi_n(\cdot, \mathbf{x}^0)]$, kde $t \in I_{\mathbf{x}^0}$, nazýváme *orbitou* řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathbf{x}^0)$ soustavy (1.1).

Poznámka 3. Množina všech orbit soustavy (1.1) se nazývá *fázový portrét*. Šipky na orbitách popisují pohyb odpovídajícího bodu řešení při rostoucím čase t . Prostor \mathbb{R}^n obsahující fázový portrét soustavy (1.1) nazveme *fázový prostor*.

Poznámka 4. Orbita řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathbf{x}^0)$ je vlastně projekce grafu řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathbf{x}^0)$ do fázového prostoru \mathbb{R}^n .

Definice 5. Bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$, který splňuje

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

se nazývá *rovnovážný bod* soustavy (1.1).

Poznámka 5. Často se užívá pro označení rovnovážného bodu také *ekvilibrium*, *singulární bod* nebo *kritický bod*.

Věta 2. [3, kapitola VI, věta 1.5] *Autonomní soustava (1.1) může mít orbity trojího typu:*

- 1) *Rovnovážné body, které odpovídají konstantním řešením.*
- 2) *Cykly (uzavřené křivky), které odpovídají nekonstantním periodickým řešením.*
- 3) *Otevřené neprotínající se křivky, které představují ostatní řešení.*

Poznámka 6. Speciálními typy orbit jsou *homoklinické* a *heteroklinické* orbity. Homoklinická orbita odpovídá řešení, které pro $t \rightarrow \infty$ i pro $t \rightarrow -\infty$ konverguje k témuž bodu. Heteroklinická orbita odpovídá řešení, které pro $t \rightarrow \infty$ konverguje k jednomu bodu a pro $t \rightarrow -\infty$ k druhému.

Následující poznámka vysvětluje souvislost mezi dynamickým systémem (ve smyslu definice 1) a soustavou diferenciálních rovnic.

Poznámka 7. Nechť \mathbf{x}^0 je libovolný bod z otevřené množiny G v \mathbb{R}^n , dále nechť složky vektorové funkce \mathbf{f} mají spojité parciální derivace 1. řádu a nechť $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathbf{x}^0)$ je řešením úlohy (1.1), (1.2) definované na \mathbb{R} . Potom $\boldsymbol{\varphi}$ je tok (ve smyslu definice 1) definovaný soustavou diferenciálních rovnic.

1.2 Stabilita rovnovážných bodů v \mathbb{R}^2

Pro obecnost byly definice v kapitole 1.1 uvedeny pro dynamický systém v \mathbb{R}^n . Tato práce bude ovšem zaměřena na planární nelineární dynamické systémy, proto se dále omezíme na prostor \mathbb{R}^2 .

Uvažujme tedy autonomní soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(x_1, x_2), \\x'_2 &= f_2(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{1.3}$$

s vektorovým zápisem (1.1), kde f_1, f_2 jsou spojitě spolu s parciálními derivacemi 1. řádu na $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Podle věty 1 má pak počáteční úloha (1.1), (1.2) jediné řešení definované na maximálním intervalu své existence $I_{\mathbf{x}^0}$ a toto řešení značíme $\varphi(\cdot, \mathbf{x}^0)$.

Definice 6. Rovnovážný bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ soustavy (1.3) nazveme *stabilní*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taková, že pro každé $\mathbf{x}^0 \in G$ platí implikace:

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \Rightarrow \langle 0, \infty \rangle \subseteq I_{\mathbf{x}^0} \quad \text{a} \quad \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon \quad \text{pro každé} \quad t \geq 0.$$

V opačném případě se rovnovážný bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ soustavy (1.3) nazývá *nestabilní*.

Definice 7. Rovnovážný bod $\bar{\mathbf{x}} \in G$ soustavy (1.3) nazveme *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc existuje $r > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{x}^0 \in G$ platí

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0.$$

Při vyšetřování vlastností rovnovážného bodu hraje důležitou roli *Jacobiho matice* vektorové funkce \mathbf{f} a její *vlastní čísla*. Jacobiho matice funkce \mathbf{f} v bodě $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ je tvaru

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}\tag{1.4}$$

a její vlastní čísla získáme jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

kde \mathbf{I} značí jednotkovou matici.

Definice 8. Necht $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ je rovnovážný bod soustavy (1.3). Má-li Jacobiho matice (1.4) obě vlastní čísla s nenulovými reálnými částmi, pak se rovnovážný bod $\bar{\mathbf{x}}$ soustavy (1.3) nazývá *hyperbolický*.

Má-li Jacobiho matice (1.4) alespoň jedno vlastní číslo s nulovou reálnou složkou, pak mluvíme o *nehyperbolickém* rovnovážném bodu soustavy (1.3).

Nyní se podívejme na stabilitu hyperbolických rovnovážných bodů. Jak již bylo řečeno, budeme se zde zabývat nelineárními soustavami. Stabilitu jejich rovnovážných bodů nebudeme určovat přímo. Nelineární soustavu v okolí rovnovážného bodu srovnáme s vhodnou soustavou lineární a uvedeme pojmy, které nám zajistí, že vlastnosti tohoto lineárního systému, které umíme obecně určit, za určitých podmínek přechází na nelineární systém.

Definice 9. Necht $\bar{x} \in G$ je rovnovážný bod soustavy (1.3). Soustava

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{f}(\bar{x})\mathbf{y} \quad (1.5)$$

se nazývá *lineární variační soustava* k soustavě (1.3) v bodě \bar{x} .

Nyní uvažujme soustavu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (1.6)$$

kde vektorová funkce $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ má spojité parciální derivace na otevřené množině $\tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definice 10. Necht $U \subset G$ a $V \subset \tilde{G}$ jsou otevřené množiny. Soustava (1.3) na U se nazývá *topologicky ekvivalentní* se soustavou (1.6) na V , jestliže existuje homeomorfismus $\mathbf{h} : U \rightarrow V$ takový, že substituce $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ transformuje soustavu (1.3) na soustavu (1.6). To znamená, že orbity soustavy (1.3) ležící v U jsou jednoznačně spojitě zobrazeny na orbity soustavy (1.6) ležící ve V , přičemž směr šipek na orbitách zůstává zachován.

Věta 3. [4, Věta 7.9] (Grobman-Hartman) *Necht $\bar{x} \in G$ je hyperbolický rovnovážný bod soustavy (1.3). Pak existuje okolí $U \subset G$ bodu \bar{x} a okolí $V \subset \mathbb{R}^2$ bodu $[0,0]$ tak, že soustava (1.3) na U je topologicky ekvivalentní s lineární variační soustavou (1.5) na V .*

Poznámka 8. Jelikož podle definice 10 uvažujeme pouze okolí U a V , popisujeme pouze lokální chování a hovoříme tedy o *lokální topologické ekvivalenci*.

Pomocí známých tvrzení o stabilitě nulového řešení lineárních soustav a topologické ekvivalenci uvedené ve větě 3 lze dokázat následující věty.

Věta 4. [4, Věta 7.11] *Necht $\bar{x} \in G$ je hyperbolický rovnovážný bod soustavy (1.3). Jestliže vlastní čísla Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\bar{x})$ mají záporné reálné části, pak je rovnovážný bod \bar{x} asymptoticky stabilní.*

Věta 5. [4, Věta 7.12] *Necht $\bar{x} \in G$ je hyperbolický rovnovážný bod soustavy (1.3). Jestliže alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\bar{x})$ má kladnou reálnou část, je rovnovážný bod \bar{x} nestabilní.*

Pokud tedy hovoříme o hyperbolickém rovnovážném bodu soustavy (1.3), umíme již určit typ jeho stability. Ovšem pokud má alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice nulovou reálnou část a rovnovážný bod \bar{x} je tedy nehyperbolický, neumíme podle výše uvedených vztahů o jeho stabilitě rozhodnout.

V teorii dynamických systémů je zavedeno mnoho typů rovnovážných bodů. Pro tuto práci bude dostačující zavedení rovnovážného bodu typu sedlo a rovnovážného bodu typu střed.

Definice 11. Rovnovážný bod \bar{x} soustavy (1.3) se nazývá *sedlo*, pokud existují body $\mathbf{x}^0 \neq \bar{x}$ a $\mathbf{x}^1 \neq \bar{x}$ takové, že

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}^0) = \bar{x}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}^1) = \bar{x}.$$

Definice 12. Rovnovážný bod \bar{x} systému (1.3) nazveme *střed*, jestliže existuje okolí U bodu \bar{x} , takové, že pro každé $\mathbf{x}^0 \in U$, $\mathbf{x}^0 \neq \bar{x}$ je orbita procházející bodem \mathbf{x}^0 cyklem, tj. řešení $\varphi(\cdot, \mathbf{x}^0)$ soustavy (1.3) je definované na \mathbb{R} a je periodické.

Poznámka 9. Vzhledem k definici 6 vidíme, že rovnovážný bod typu sedlo je vždy nestabilní.

1.3 Hamiltonovy systémy

Nyní uvedeme speciální tvar soustavy (1.3), jehož nejvýraznější vlastností je, že budeme schopni její fázový portrét vyšetřit globálně.

Definice 13. Necht $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a funkce $H : G \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě parciální derivace až do druhého řádu. Soustava tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ x_2' &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.7)$$

se nazývá *Hamiltonův systém* a funkci H nazýváme *hamiltonián*.

Definice 14. Necht $c \in \mathbb{R}$. Hladinou H_c funkce H nazýváme množinu bodů $[x_1, x_2] \in G$ splňující rovnici

$$H(x_1, x_2) = c.$$

Opět budeme spolu se soustavou (1.7) uvažovat počáteční podmínku

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (1.8)$$

kde $\mathbf{x}^0 \in G$.

Věta 6. [4, Věta 8.2] (Konzervace energie) Necht $\mathbf{x}^0 \in G$ a $\varphi(\cdot, \mathbf{x}^0)$ je řešení počáteční úlohy (1.7), (1.8) na maximálním intervalu $I_{\mathbf{x}^0} \subseteq \mathbb{R}$. Pak pro každé $t \in I_{\mathbf{x}^0}$ platí

$$H(\varphi(t, \mathbf{x}^0)) = H(\mathbf{x}^0).$$

Důsledek 1. Hladiny hamiltoniánu H se skládají z orbit soustavy (1.7).

Speciálním typem soustavy (1.7) je tzv. *konzervativní systém* tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -f(x_1), \end{aligned} \quad (1.9)$$

kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Tato soustava je v jistém smyslu ekvivalentní s diferenciální rovnicí druhého řádu neobsahující členy s první derivací. Hamiltonián soustavy (1.9) má tvar

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(u) du \quad \text{pro } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.10)$$

Rovnovážné body této soustavy jsou tvaru $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, 0]$, z čehož si jednoduše odvodíme, že rovnovážné body leží na ose x_1 fázové roviny. Podívejme se na jejich klasifikaci.

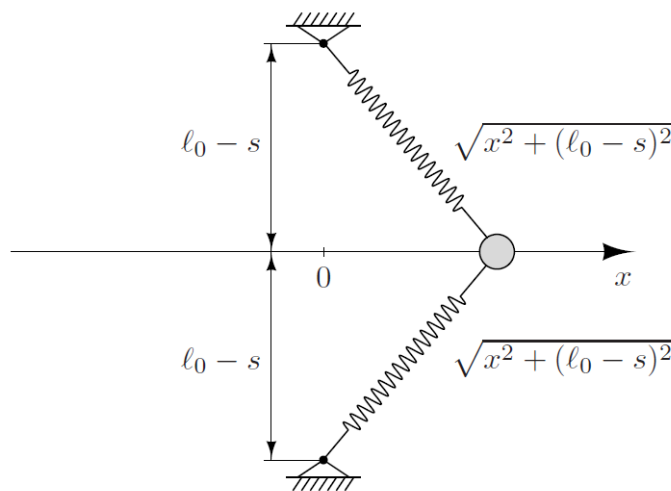
Věta 7. [4, Věta 8.9] Necht $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, 0] \in G$ je rovnovážný bod systému (1.9). Je-li $f'(\bar{x}_1) < 0$, je $\bar{\mathbf{x}}$ sedlo systému (1.9). Je-li $f'(\bar{x}_1) > 0$, je $\bar{\mathbf{x}}$ střed systému (1.9).

2 Analýza vybrané diferenciální rovnice se superlinearitami

V této části provedeme analýzu diferenciální rovnice druhého řádu

$$x'' - \frac{2ks}{m(l_0 - s)}x + \frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3}x^3 - \frac{3kl_0}{4m(l_0 - s)^5}x^5 = 0. \quad (2.1)$$

Zaměříme se zejména na otázku stability a typu rovnovážných bodů a vykreslíme odpovídající fázové portréty. Tuto rovnici například získáme, pokud vhodně aproximujeme nelineární člen v pohybové rovnici nelineárního oscilátoru, který je složen ze dvou pružin a jednoho závaží (viz obrázek 2.1). Budeme se zabývat volnými kmity, což znamená, že závaží vychýlíme z rovnovážné polohy a po uvolnění jej necháme volně se pohybovat bez působení buzení.



Obrázek 2.1: Model nelineárního oscilátoru

Poznámka 10. Budeme předpokládat, že pohyb tělesa ve svislém směru je omezen, tj. budeme se zabývat pohybem ve směru osy x .

Označení vstupních parametrů je následující:

- $l_0 \dots$ délka nedeformované pružiny,
- $s \dots$ stlačení pružiny, je-li těleso v poloze $x = 0$ ($0 < s < l_0$),
- $k \dots$ tuhost lineární pružiny,
- $m \dots$ hmotnost závaží.

Při odvozování pohybové rovnice vycházíme z druhého Newtonova zákona, který říká, že zrychlení hmotného bodu je přímo úměrné výslednici sil působících na hmotný bod a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa. Jeho přesnou definici lze najít například v [1].

Jelikož uvažujeme pouze pohyb ve směru osy x dostáváme

$$2F_p \sin \alpha = mx'', \quad (2.2)$$

kde F_p označuje sílu, kterou vyvolává pružina a je úměrná její deformaci, proto

$$F_p = - \left(\sqrt{x^2 + (l_0 - s)^2} - l_0 \right) k.$$

Dále pak α je úhel odklonu pružiny a platí

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (l_0 - s)^2}}.$$

Po dosazení výše uvedených vztahů do (2.2) a úpravě dostáváme pohybovou rovnici

$$mx'' + 2kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + (l_0 - s)^2}} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Nyní aproximujme nelineární člen v (2.3) pomocí Taylorova polynomu 5. stupně se středem v bodě 0. Připomeňme, že Taylorův polynom funkce f stupně n v bodě x_0 je tvaru

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (2.4)$$

Označme

$$f(x) = x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + (l_0 - s)^2}} \right) \quad (2.5)$$

a provedme derivace funkce f do 5. řádu v bodě $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= -\frac{s}{l_0 - s}, \\ f''(0) &= 0, \\ f'''(0) &= \frac{3l_0}{(l_0 - s)^3}, \\ f^{(4)}(0) &= 0, \\ f^{(5)}(0) &= -\frac{45l_0}{(l_0 - s)^5}. \end{aligned}$$

Dosazením derivací do (2.4) dostáváme

$$T_5(x) = -\frac{s}{(l_0 - s)} x + \frac{l_0}{2(l_0 - s)^3} x^3 - \frac{3l_0}{8(l_0 - s)^5} x^5.$$

Nahradíme-li člen (2.5) v rovnici (2.3) získaným polynomem, dostáváme diferenciální rovnici (2.1). Jelikož se v rovnici vyskytují mocninné nelinearity s mocnitelem větším než 1, mluvíme o diferenciální rovnici se superlinearitami.

2.1 Rovnovážné body

V předchozí podkapitole jsme odvodili nelineární diferenciální rovnici druhého řádu (2.1) jako aproximaci pohybové rovnice nelineárního oscilátoru. Nyní ji přepíšeme na Hamiltonův systém (viz kapitolu 1.3).

Užitím substituce

$$\begin{aligned}x_1 &= x, \\x_2 &= x'\end{aligned}$$

dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= \frac{2ks}{m(l_0 - s)}x_1 - \frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3}x_1^3 + \frac{3kl_0}{4m(l_0 - s)^5}x_1^5,\end{aligned}\tag{2.6}$$

což je speciální případ soustavy (1.9), kde funkce f je definovaná vztahem

$$f(z) = -\frac{2ks}{m(l_0 - s)}z + \frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3}z^3 - \frac{3kl_0}{4m(l_0 - s)^5}z^5.\tag{2.7}$$

Podle definice 5 je bod, jehož souřadnice nulují pravou stranu soustavy (2.6), rovnovážným bodem. Proto nyní řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0 &= x_2, \\0 &= \frac{2ks}{m(l_0 - s)}x_1 - \frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3}x_1^3 + \frac{3kl_0}{4m(l_0 - s)^5}x_1^5.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Označme

$$\alpha = \frac{2ks}{m(l_0 - s)}, \quad \beta = \frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3}, \quad \gamma = \frac{3kl_0}{4m(l_0 - s)^5}.$$

Vytknutím x_1 v rovnici

$$\alpha x_1 - \beta x_1^3 + \gamma x_1^5 = 0\tag{2.9}$$

získáváme

$$x_1(\alpha - \beta x_1^2 + \gamma x_1^4) = 0,$$

a zřejmě $x_1 = 0$ je jedním kořenem rovnice (2.9).

Dále užitím substituce $t = x_1^2$ dostáváme kvadratickou rovnici

$$\gamma t^2 - \beta t + \alpha = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$t_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma}.$$

Provedeme zpětnou substituci a zároveň dosadíme zpět za α, β, γ . Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= t, \\
 x_1 &= \pm \sqrt{\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma}}, \\
 x_1 &= \pm \sqrt{\frac{\frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3} \pm \sqrt{\left(\frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3}\right)^2 - 4\frac{2ks}{m(l_0 - s)}\frac{3kl_0}{4m(l_0 - s)^5}}}{2\frac{3kl_0}{4m(l_0 - s)^5}}}, \\
 x_1 &= \pm \sqrt{\frac{2m(l_0 - s)^5}{3kl_0} \left[\frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3} \pm \frac{kl_0}{m(l_0 - s)^3} \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right]}, \\
 x_1 &= \pm \sqrt{\frac{2}{3}(l_0 - s)^2 \pm \frac{2}{3}(l_0 - s)^2 \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}}}, \\
 x_1 &= \pm (l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 \pm \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Nalezli jsme rovnovážný bod

$$S_1 = [0, 0]$$

a je-li $l_0 \geq 6s$ pak dostáváme

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \left[(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right], \\
 S_3 &= \left[-(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right], \\
 S_4 &= \left[(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right], \\
 S_5 &= \left[-(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right].
 \end{aligned}$$

Lze si všimnout, že počet rovnovážných bodů se bude měnit v závislosti na hodnotách parametrů l_0 a s . Je-li $l_0 < 6s$ dostáváme jeden, pro $l_0 = 6s$ získáváme tři a pro $l_0 > 6s$ pět rovnovážných bodů. Jejich klasifikaci uvedeme pro jednotlivé případy zvlášť. Budeme se opírat zejména o větu 7, uvedme tedy potřebnou derivaci funkce f (viz vztah (2.7)), pomocí které budeme tyto body klasifikovat. Zřejmě

$$f'(z) = -\frac{2ks}{m(l_0 - s)} + \frac{3kl_0}{m(l_0 - s)^3} z^2 - \frac{15kl_0}{4m(l_0 - s)^5} z^4. \tag{2.11}$$

2.2 Hamiltonián soustavy (2.6)

Vzhledem k (1.10) a (2.7) je hamiltonián soustavy (2.6) tvaru

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \frac{k}{m(l_0 - s)} \left[sx_1^2 - \frac{l_0}{4(l_0 - s)^2} x_1^4 + \frac{l_0}{8(l_0 - s)^4} x_1^6 \right] \quad (2.12)$$

pro $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$.

V kapitole 1.3 jsme zavedli pojem hladiny H_c hamiltoniánu H . V našem případě je H_c množina bodů $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{k}{m(l_0 - s)} \left[sx_1^2 - \frac{l_0}{4(l_0 - s)^2} x_1^4 + \frac{l_0}{8(l_0 - s)^4} x_1^6 \right] = c. \quad (2.13)$$

Podle důsledku 1 se hladiny hamiltoniánu skládají z orbit soustavy (2.6). K vykreslení globálního fázového portrétu tedy stačí vykreslit množiny bodů $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ splňující (2.13) pro různé přípustné hodnoty konstanty c . Nejprve najdeme hladiny hamiltoniánu obsahující rovnovážné body soustavy (2.6) a poté budeme hledat hladiny pro ostatní přípustné hodnoty konstanty c . Hodnoty hamiltoniánu v rovnovážných bodech budou přitom tvořit mezní hodnoty pro c , v nichž obvykle dochází ke kvalitativní změně tvaru hladin, tj. změně typu orbit soustavy (2.6).

Pro S_1 dostáváme

$$H(S_1) = 0. \quad (2.14)$$

Vyjádření hladiny pro ostatní rovnovážné body je obtížnější, proto uvedeme celý výpočet. Dosazením (2.10) do (2.12) dostáváme

$$H \left(\pm(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 \pm \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right) = -\frac{k}{m(l_0 - s)} \left[s(l_0 - s)^2 \frac{2}{3} A - l_0(l_0 - s)^2 \frac{1}{9} A^2 + l_0(l_0 - s)^2 \frac{1}{27} A^3 \right], \quad (2.15)$$

kde $A = \left(1 \pm \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)$. Pravou stranu výrazu (2.15) upravíme a získáme tak hodnoty hamiltoniánu v rovnovážných bodech S_2, S_3, S_4 a S_5 ve tvaru

$$\begin{aligned} & -\frac{k}{m}(l_0 - s) \frac{1}{27} A [18s - 3l_0 A + l_0 A^2] \\ &= -\frac{k}{m}(l_0 - s) \frac{1}{27} A \left[18s - 3l_0 \mp 3l_0 \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} + l_0 \pm 2l_0 \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} + l_0 - 6s \right] \\ &= -\frac{k}{m}(l_0 - s) \frac{1}{27} A \left[12s - l_0 \mp l_0 \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right] \\ &= -\frac{k}{m}(l_0 - s) \frac{1}{27} A \left[2(6s - l_0) \mp l_0 \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} + l_0 \right] \\ &= -\frac{kl_0}{27m}(l_0 - s) A \left[1 \mp \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} - 2 \frac{l_0 - 6s}{l_0} \right] \\ &= \frac{kl_0}{27m}(l_0 - s) A^2 \left[\sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \pm 1 \right] \left[\sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \mp \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Je-li $l_0 \geq 6s$, pro S_2 a S_3 dostáváme

$$H(S_{2,3}) = \frac{2kl_0(l_0 - s)}{27m} \left[1 - \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right] \left[\sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} - 1 \right] \left[\sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} + \frac{1}{2} \right], \quad (2.16)$$

a pro S_4 a S_5 lze odvodit

$$H(S_{4,5}) = \frac{2kl_0(l_0 - s)}{27m} \left[1 + \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right] \left[\sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} + 1 \right] \left[\sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.17)$$

Podobně jako v kapitole 2.1, kde jsme odvodili singulární body, i zde si můžeme všimnout, že bude záležet na volbě vstupních hodnot l_0 a s . Vždy máme

$$H(S_1) = 0, \quad H(S_{2,3}) < 0. \quad (2.18)$$

Navíc lze ukázat, že

$$H(S_{2,3}) < H(S_{4,5}). \quad (2.19)$$

Ovšem pro body S_4, S_5 dostáváme

$$H(S_{4,5}) < 0, \quad \text{je-li } l_0 < 8s, \quad (2.20)$$

$$H(S_{4,5}) = 0, \quad \text{je-li } l_0 = 8s, \quad (2.21)$$

$$H(S_{4,5}) > 0, \quad \text{je-li } l_0 > 8s. \quad (2.22)$$

2.3 Řešení pro jednotlivé závislosti vstupních hodnot

Nyní uvedeme řešení jednotlivě pro pět různých závislostí l_0 a s , které jsme získali v kapitolách 2.1 a 2.2. Připomeňme, že l_0 je původní délka pružiny v nezatíženém stavu a s je délka stlačení pružiny, je-li těleso v poloze $x = 0$.

2.3.1 Příklad $l_0 < 6s$

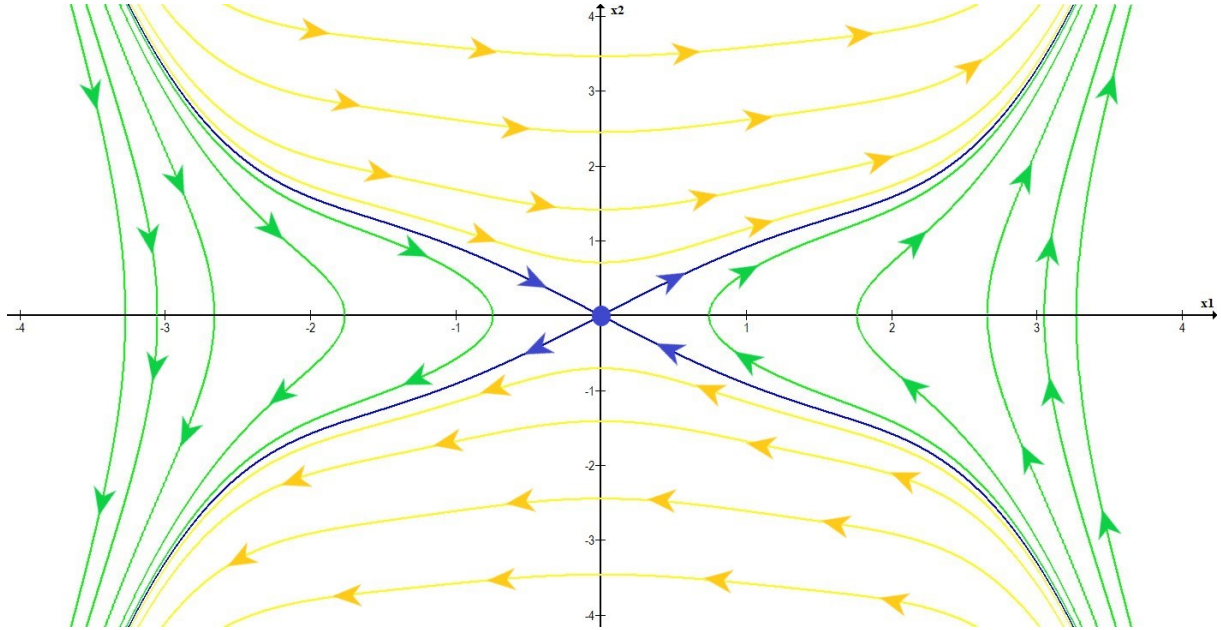
V tomto případě má soustava (2.8) v reálném oboru pouze jedno řešení a máme tedy pouze jeden rovnovážný bod $S_1 = [0, 0]$. Ze vztahu (2.11) dostáváme

$$f'(0) = -\frac{2ks}{m(l_0 - s)} < 0$$

a z věty 7 tedy plyne, že S_1 je rovnovážný bod typu sedlo, viz obr. 2.2. Navíc, vzhledem k poznámce 9, je S_1 nestabilní.

Vykreslíme nyní fázový portrét rovnice (2.1), přesněji řečeno soustavy (2.6). V kapitole 2.2 jsme ukázali, že stačí vykreslit hladiny hamiltoniánu H_c pro různé hodnoty konstanty c . Vzhledem k (2.14) je hladina obsahující rovnovážný bod S_1 daná rovnicí (2.13) v níž $c = 0$. Tato hladina tvoří mezní hladinu. Ostatní hladiny jsou také dané rovnicí (2.13), přičemž $c \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Odpovídající orbity jsou v obrázku 2.2 znázorněny pro tyto volby následovně:

$$\begin{array}{ll} c = 0 & \rightarrow \text{tmavě modré orbity,} \\ c < 0 & \rightarrow \text{zelené orbity,} \\ c > 0 & \rightarrow \text{žluté orbity.} \end{array}$$


 Obrázek 2.2: Fázový portrét rovnice (2.1) pro $l_0 < 6s$

Z fázového portréту na obrázku 2.2 lze odvodit, že rovnice (2.1) má jedno konstantní řešení, kterému odpovídá rovnovážný bod S_1 . Dále existují řešení rovnice (2.1) konvergující k 0 pro $t \rightarrow \infty$ a řešení konvergující k 0 pro $t \rightarrow -\infty$.

2.3.2 Příklad $l_0 = 6s$

V tomto případě dostáváme tři rovnovážné body

$$S_1 = [0, 0], \quad S_2 = \left[(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right], \quad S_3 = \left[-(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right].$$

Stejně jako v kapitole 2.3.1 ukážeme, že S_1 je nestabilní rovnovážný bod typu sedlo. Podívejme se na body S_2 a S_3 . Dosazením do (2.11) dostáváme

$$f' \left(\pm (l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 0,$$

a podle věty 7 tedy nelze o typu těchto bodů rozhodnout. Pokusme se rozhodnout alespoň o jejich stabilitě pomocí vlastních čísel Jacobiho matice soustavy (2.6). Ta je tvaru

$$Df(S_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

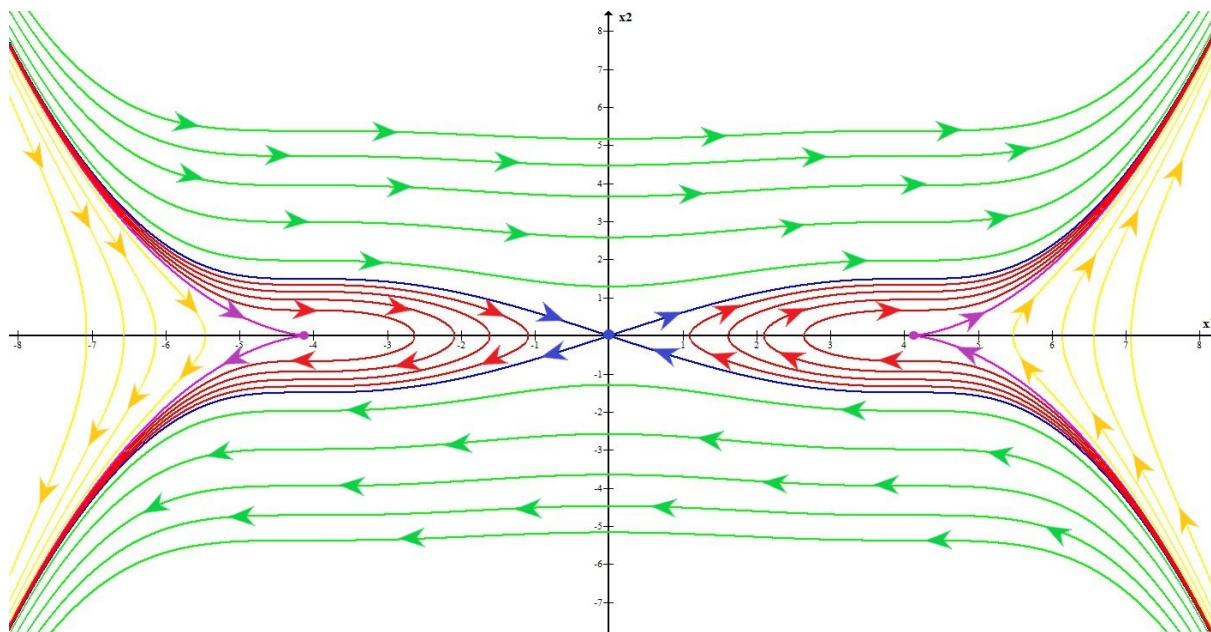
Jelikož její vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 0$, jedná se o nehyperbolické rovnovážné body, a tedy k rozhodnutí o jejich stabilitě nelze použít větu 4 ani 5. Vykreslíme proto nejprve fázový portrét a o stabilitě rovnovážných bodů $S_{2,3}$ rozhodneme později na základě tvaru orbit v jejich okolí.

Již víme, že $H(S_1) = 0$ a hladina pro bod S_1 je dána vztahem (2.13), kde c je rovná nule. Pro rovnovážné body $S_{2,3}$ dosazením $l_0 = 6s$ do vztahu (2.16) dostáváme

$$H(S_{2,3}) = \frac{-kl_0(l_0 - s)}{27m} < 0.$$

Hladina, která tyto body obsahuje je dána vztahem (2.13), kde $c = H(S_{2,3})$. Odpovídající orbity hladinám v obrázku 2.3 pro různé hodnoty c jsou tedy následující:

$c = 0$	→ tmavě modré orbity,
$c = H(S_{2,3})$	→ fialové orbity,
$c > H(S_{2,3}) \wedge c < 0$	→ červené orbity,
$c < H(S_{2,3})$	→ žluté orbity,
$c > 0$	→ zelené orbity.



Obrázek 2.3: Fázový portrét rovnice (2.1) pro $l_0 = 6s$

Vraťme se nyní k určení typu a stability rovnovážných bodů S_2 a S_3 . Jak již bylo řečeno, tyto body jsou obsaženy na hladině, které odpovídají na obrázku 2.3 fialové orbity. Z definice 11 a tvaru orbit vyplývá, že S_2 , S_3 jsou sedla. Navíc vzhledem k poznámce 9, jsou body S_2 , S_3 nestabilní.

Co se týká existence řešení, pomocí fázového portréту 2.3 lze říci, že má rovnice (2.1) tři konstantní řešení, přičemž všechna jsou nestabilní (dva fialové a jeden modrý rovnovážný bod). Ostatní orbity naznačují existenci různých typů řešení, některé z nich konvergují ke konstantním řešením pro $t \rightarrow \infty$, příp. pro $t \rightarrow -\infty$.

2.3.3 Příklad $6s < l_0 < 8s$

Jelikož $l_0 > 6s$, dostáváme pět rovnovážných bodů

$$S_1 = [0, 0], \quad (2.23)$$

$$S_2 = \left[(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right], \quad (2.24)$$

$$S_3 = \left[-(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right], \quad (2.25)$$

$$S_4 = \left[(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right], \quad (2.26)$$

$$S_5 = \left[-(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)}, 0 \right]. \quad (2.27)$$

Stejně jako v kapitole 2.3.1 ukážeme, že S_1 je nestabilní rovnovážný bod typu sedlo.

Podívejme se na klasifikaci bodů S_2 a S_3 . Dosazením do (2.11) dostáváme

$$f' \left(\pm(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)} \right) = \frac{4k \left(6s - l_0 + \sqrt{l_0(l_0 - 6s)} \right)}{3m(l_0 - s)} > 0.$$

Vzhledem k větě 7 se tedy jedná o rovnovážné body typu střed. O jejich stabilitě rozhodneme později na základě tvaru orbit ve fázovém portrétu.

Pro body S_4 a S_5 platí

$$f' \left(\pm(l_0 - s) \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{l_0 - 6s}{l_0}} \right)} \right) = \frac{4k \left(6s - l_0 - \sqrt{l_0(l_0 - 6s)} \right)}{3m(l_0 - s)} < 0,$$

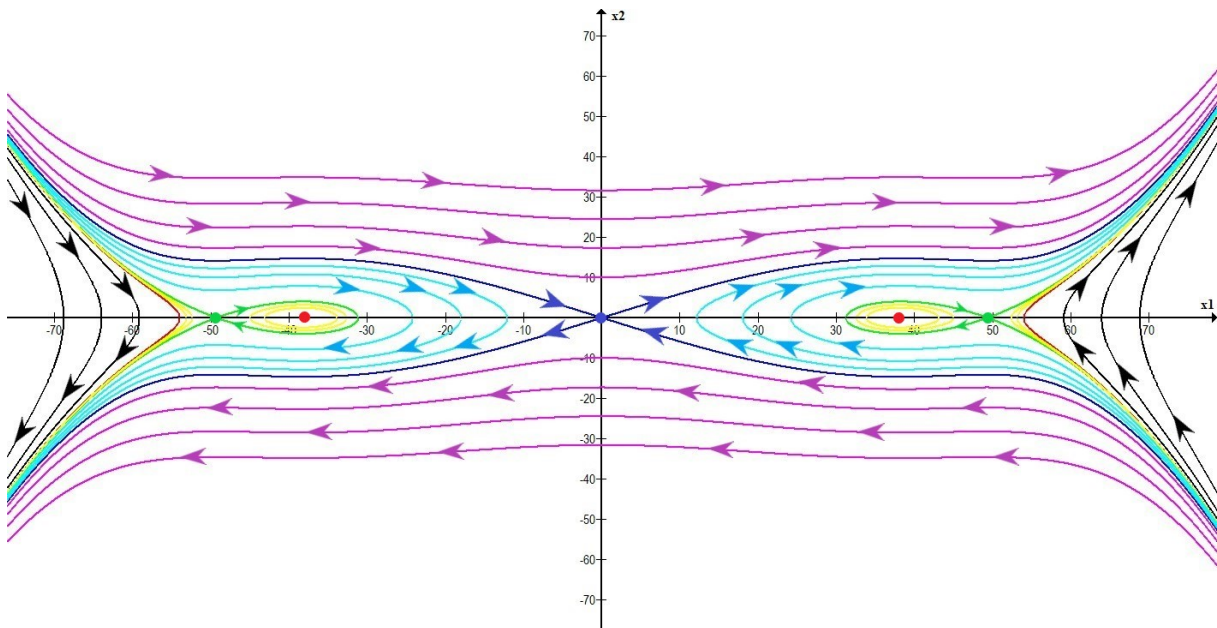
a podle věty 7 se tedy jedná o rovnovážné body typu sedlo. S přihlédnutím k poznámce 9 jsou tyto body nestabilní.

Nyní vykreslíme fázový portrét rovnice (2.1). Vzhledem k (2.18)-(2.20) máme

$$H(S_1) = 0, \quad H(S_{2,3}) < H(S_{4,5}) < 0.$$

Hladiny hamiltoniánu obsahující rovnovážné body jsou dány rovnicí (2.13), ve které budeme dosazovat za c hodnoty $H(S_1)$, $H(S_{2,3})$ a $H(S_{4,5})$. Získáme tak mezní hodnoty pro c . V obrázku 2.4 odpovídají pro

$c = 0$	\rightarrow tmavě modré orbity,
$c = H(S_{2,3})$	\rightarrow zelené orbity,
$c = H(S_{4,5})$	\rightarrow červené středy (body) a červené orbity,
$c < H(S_{2,3})$	\rightarrow černé orbity,
$c > H(S_{2,3}) \wedge c < H(S_{4,5})$	\rightarrow žluté orbity,
$c > H(S_{4,5})$	\rightarrow světlé modré orbity,
$c > 0$	\rightarrow fialové orbity.


 Obrázek 2.4: Fázový portrét rovnice (2.1) pro $6s < l_0 < 8s$

Vraťme se k určení stability rovnovážných bodů S_2 a S_3 . Z fázového portréту v obrázku 2.4 je zřejmé, že rovnovážné body S_2 a S_3 (červené body) jsou stabilní. Navíc tyto rovnovážné body odpovídají stabilním konstantním řešením. Dále pak zelené a modré rovnovážné body S_1 , S_4 a S_5 představují konstantní nestabilní řešení. Žluté cykly (kolem červených bodů) odpovídají nekonstantním periodickým řešením, které nestřídají znaménko. Zelenou barvou jsou zobrazeny homoklinické orbity, které odpovídají řešením, které pro $t \rightarrow \infty$ i pro $t \rightarrow -\infty$ konvergují ke konstantním řešením odpovídajícím S_4 a S_5 . Ostatní orbity představují zbylá nekonstantní řešení.

2.3.4 Příklad $l_0 = 8s$

V tomto případě získáváme pět rovnovážných bodů (2.23)–(2.27). Stejně jako v kapitole 2.3.1 ukážeme, že S_1 je nestabilní rovnovážný bod typu sedlo. Dále lze analogicky jako v kapitole 2.3.3 ověřit, že S_4 , S_5 jsou také nestabilní rovnovážné body typu sedlo a obdobně pomocí vykreslení fázového portrétu lze určit, že S_2 a S_3 jsou stabilní body typu střed.

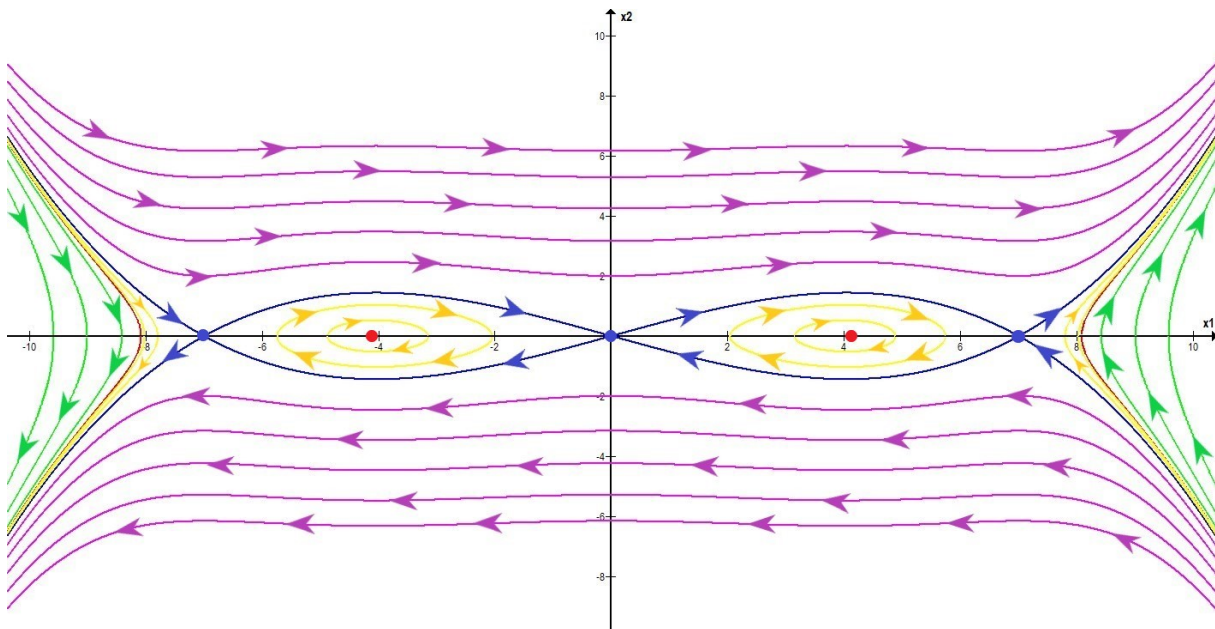
Vzhledem k (2.18), (2.19) a (2.21) máme

$$H(S_1) = H(S_{4,5}) = 0, \quad H(S_{2,3}) < 0.$$

Všimněme si, že body S_1 , S_4 a S_5 jsou obsaženy ve stejné nulové hladině. Za c ze vztahu (2.13) dosadíme mezní hodnoty a dále zbylé hodnoty konstanty c . Orbity odpovídající hladinám v obrázku 2.5 jsou pro

$$\begin{aligned} c = 0 & \rightarrow \text{tmavě modré orbity,} \\ c = H(S_{2,3}) & \rightarrow \text{červené středy (body) a orbity,} \end{aligned}$$

$c = H(S_{4,5})$	→ tmavě modré orbity,
$c < H(S_{2,3})$	→ zelené orbity,
$c > H(S_{2,3}) \wedge c < H(S_{4,5})$	→ žluté orbity,
$c > 0$	→ fialové orbity.


Obrázek 2.5: Fázový portrét rovnice (2.1) pro $l_0 = 8s$

Obdobně jako předchozích podkapitolách vyčteme z fázového portréty v obrázku 2.5 vlastnosti některých řešení rovnice (2.1). Rovnovážné body $S_{1,2,3,4,5}$ odpovídají konstantním řešením, přičemž pro $S_{2,3}$ (červené body) máme stabilní konstantní řešení a pro $S_{1,4,5}$ (modré body) nestabilní konstantní řešení. Žluté cykly značí existenci nekonstantních periodických řešení s konstantním znaménkem. Modré heteroklinické orbity představují řešení, které pro $t \rightarrow \infty$ konvergují k jednomu „rovnovážnému řešení“ a pro $t \rightarrow -\infty$ konvergují k druhému „rovnovážnému řešení“. Ostatní orbity opět značí zbylá nekonstantní řešení.

2.3.5 Příklad $l_0 > 8s$

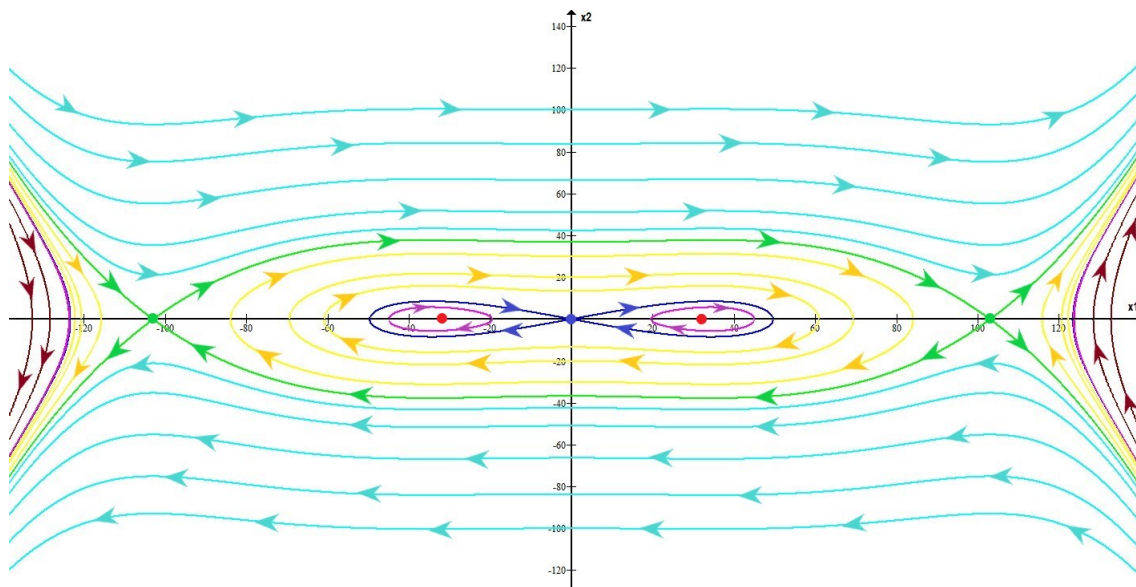
Opět získáváme pět rovnovážných bodů (2.23)-(2.27). Klasifikace zůstává stejná jako v kapitolách 2.3.3 a 2.3.4, tedy S_1 , S_4 a S_5 jsou nestabilní rovnovážné body typu sedlo a S_2 a S_3 jsou stabilní rovnovážné body typu střed.

Vzhledem k (2.18), (2.19) a (2.22) máme

$$H(S_1) = 0, \quad H(S_{2,3}) < 0, \quad H(S_{4,5}) > 0.$$

Víme, že hladiny jsou dány rovnicí (2.13). Vykreslíme tedy fázový portrét. V obrázku 2.6 odpovídají hladinám následující orbity:

$c = 0$	→ tmavě modré orbity,
$c = H(S_{2,3})$	→ červené středy (body) a orbity,
$c = H(S_{4,5})$	→ zelené orbity,
$c > H(S_{2,3}) \wedge c < 0$	→ fialové orbity,
$c > 0 \wedge c < H(S_{4,5})$	→ žluté orbity,
$c > H(S_{4,5})$	→ světle modré orbity.


Obrázek 2.6: Fázový portrét pro $l_0 > 8s$

Pomocí fázového portréту na obrázku 2.6 můžeme říci, že pro případ $l_0 > 8s$ máme pět konstantních řešení. Červené rovnovážné body $S_{2,3}$ představují stabilní řešení a rovnovážné body $S_{1,4,5}$ nestabilní řešení (modrý a zelené body). Žluté a fialové cykly odpovídají periodickým řešením, přičemž ta co odpovídají žlutým orbitám střídají znaménko a ta co odpovídají fialovým cyklům jsou buď kladná nebo záporná. Modré homoklinické orbity představují řešení, která pro $t \rightarrow \infty$ i pro $t \rightarrow -\infty$ konvergují ke stejnému „rovnovážnému řešení“ odpovídajícímu S_1 . Zelené heteroklinické orbity odpovídají řešením, která pro $t \rightarrow \infty$ konvergují k „rovnovážnému řešení“ odpovídajícímu S_4 a pro $t \rightarrow -\infty$ konvergují k „rovnovážnému řešení“ odpovídajícímu S_5 . Ostatní orbity opět značí zbylá nekonstantní řešení.

Závěr

Cílem této práce byla kvalitativní analýza a interpretace jedné diferenciální rovnice se superlinearitami v souvislosti s aproximací volných kmitů určitého nelineárního oscilátoru. Především byla v této práci řešena existence, typ a stabilita jejích rovnovážných bodů a na závěr vykreslení fázových portrétů.

Co se týká samotné analýzy, nejprve bylo nutné odvodit pohybovou rovnici jistého nelineárního oscilátoru pomocí druhého Newtonova zákona. V ní jsme pak nahradili nelineární člen pomocí Taylorova polynomu a získali jsme tak požadovanou diferenciální rovnici se superlinearitami. Tato byla následně převedena na soustavu, přesněji na speciální případ Hamiltonova systému. Nalezli jsme pět rovnovážných bodů a dále jsme vyjádřili hamiltonián soustavy včetně jeho hladiny. Z tvarů rovnovážných bodů a hodnot hamiltoniánu v těchto rovnovážných bodech, bylo zřejmé, že se naše řešení rozpadne na pět různých případů v závislosti na vstupních hodnotách l_0 a s . Pro jednotlivé případy se lišily počty rovnovážných bodů, včetně tvarů fázových portrétů, jejichž interpretace je uvedena vždy na konci jednotlivých podkapitol. Pro vykreslení fázových portrétů byl využit software GRAPH.

Literatura

- [1] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Vydání první. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2016, 171 s. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [2] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Brno: VUTIUM, 2000, 1198 s. ISBN 80-214-1869-9.
- [3] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.
- [4] RACHŮNKOVÁ, Irena a Jiří FIŠER. *Dynamické systémy I*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2014. ISBN 978-80-244-4338-6.
- [5] VERHULST, Ferdinand. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Vydání druhé. Berlin: Springer, 1996, 303 s. ISBN 3-540-60934-2.